EEH0SOU-01

SOMMERUNIVERSITET
ENERGI, ARBEJDE, EFFEKT

DAG 1, LEKTION 2 AF 2

AARHUS
UNIVERSITET
INGENIØRHØJSKOLEN AARHUS UNIVERSITET

JESPER HØGH STENGAARD HANSEN
ADJUNKT

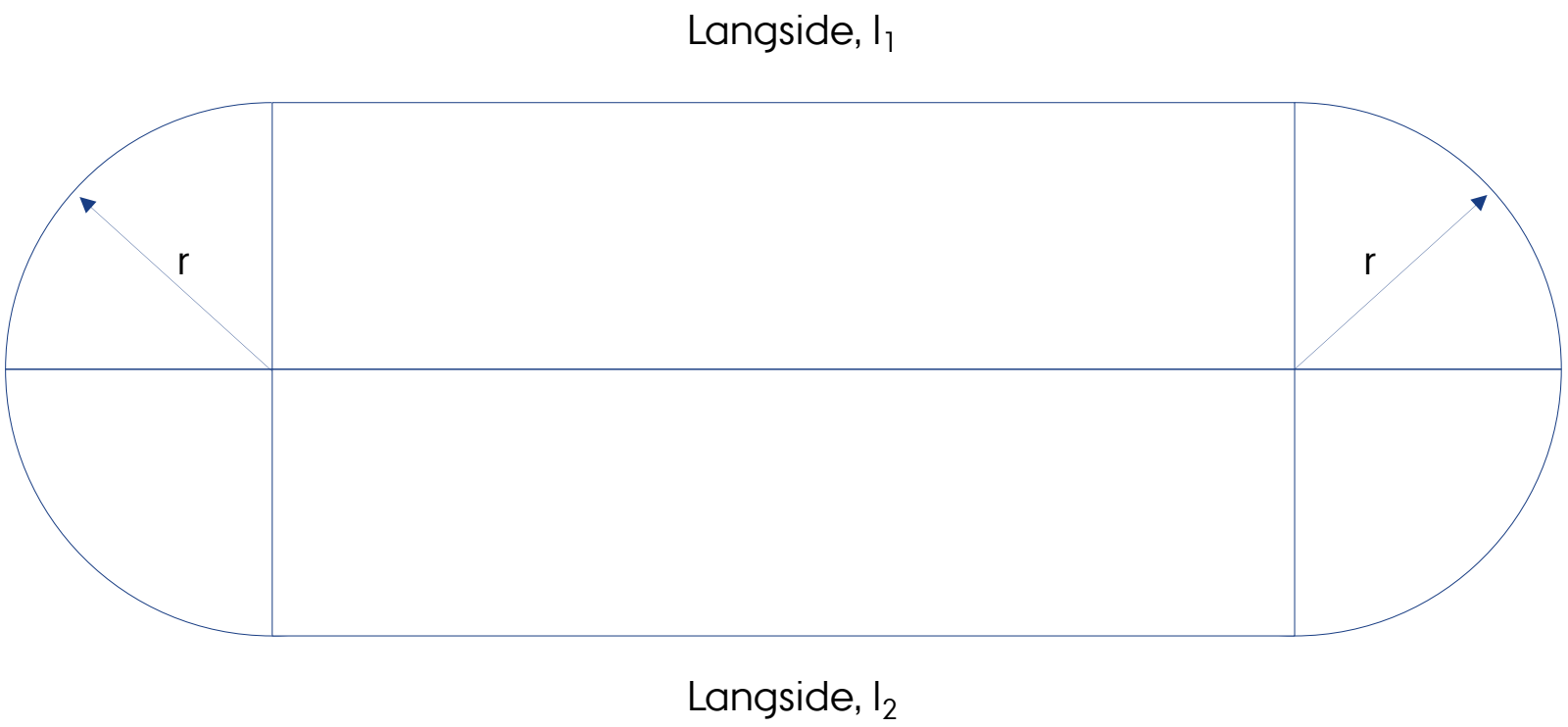
SKAL DU UD OG FRÆSE ENERGI AF?

Hvad skal der til at køre hurtigt med mindst energi?
Energi - hvor meget bruger du?
Energi - hvor meget skal du bruge?

Hvor langt, hvor hurtigt, hvor meget hurtigere
Distance, hastighed, acceleration, tid

Hvad afhænger accelerationen af?
Hvordan bruges energien til fremdrift?

GOKART BANE - ?



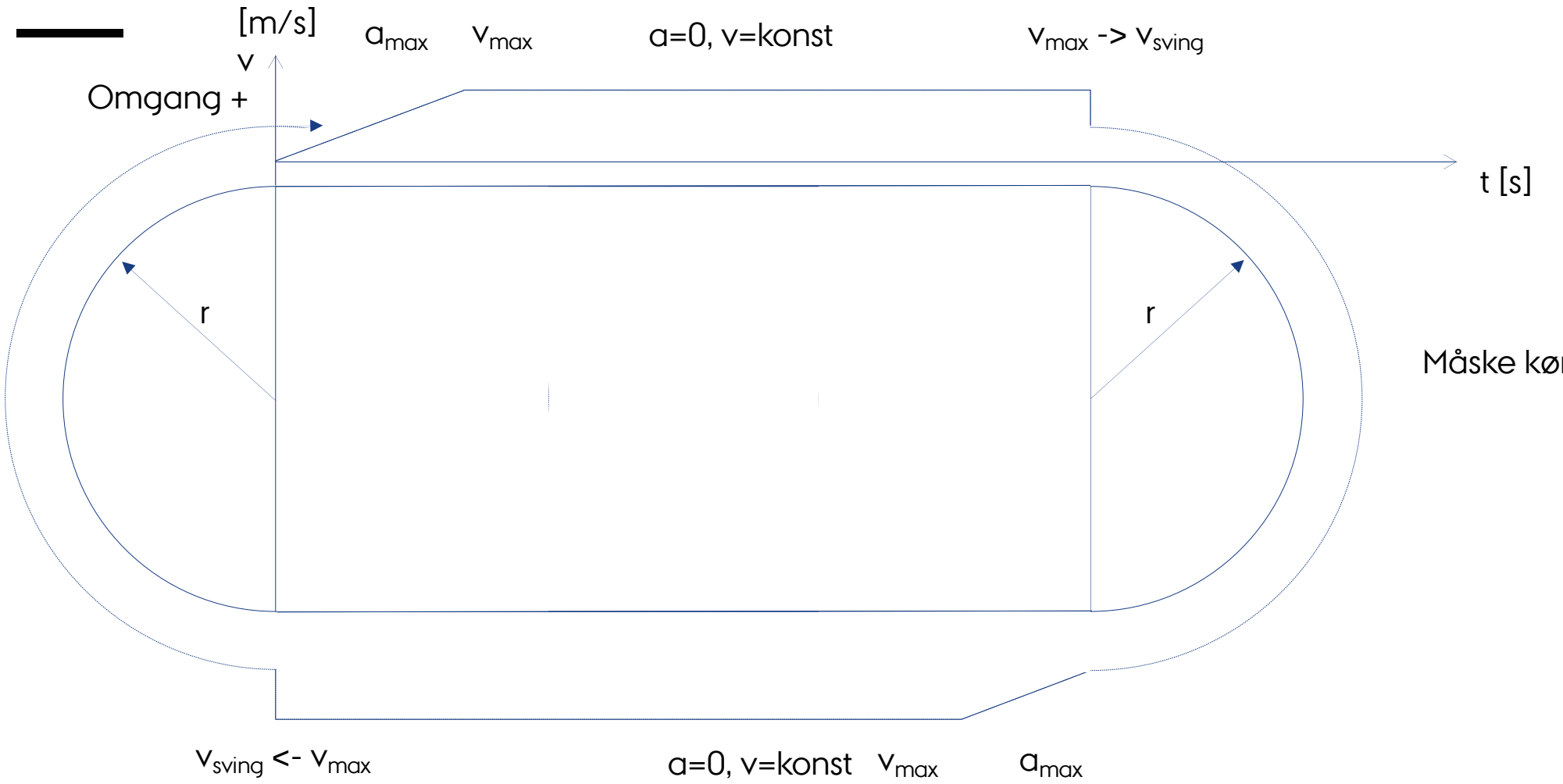
Vi antager

$r = 8$ m
$l_1 = 100$m
$l_2 = 100$m

Totale længde: 300 m

Lad os regne energi ud
så simpelt som muligt...

RACE IN ON
HURTIGST RUNDT, MINDST MULIG ENERGI



Måske kører du sådan?

EFTER LEKTIONEN HAR DU

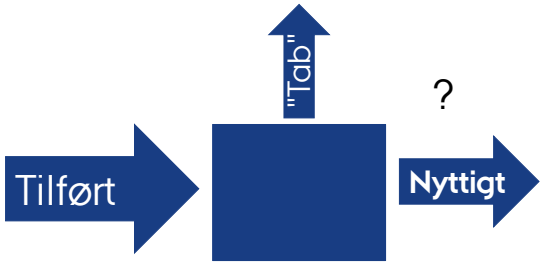
Fået genopfrisket hvordan energi omsættes til et arbejde, hvordan arbejdet beregnes, og forskellen mellem energi og effekt.

Sagt "Hej" til newtons love og brugt dem til at beregne den resulterende træk kraft på gokarten

Opstillet en matematisk "model" for en gokart og kan regne energimængden ud for en given distance.

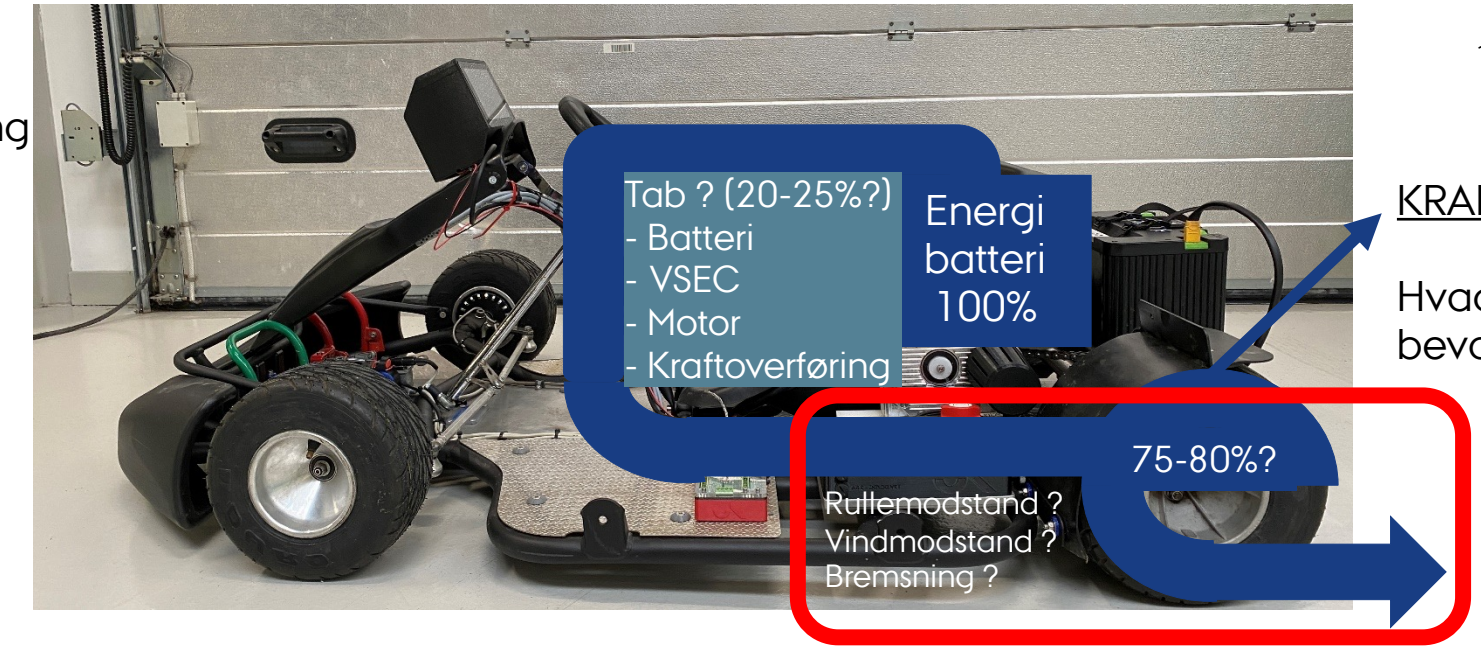
Ca. 60min bestående af oplæg og nogle beregninger som du måske kan bruge til løbsstrategi.

GO-KART
ET ENERGISYSTEM



$$\eta = \frac{\text{Nyttigt Arbejde}}{\text{Tilført Arbejde}}$$

Bevægelsesretning



KRAFTOVERFØRING TIL HJUL

Hvad skal der til for at få gokart i bevægelse?

Lad os kikke på hvad den **nyttige** energi går til. Hvordan skabes fremdriften?

Hvilke kræfter virker på gokarten? Kan vi tilnærme en "model" for beregning af energien?

ENERGI, ARBEJDE OG EFFEKT

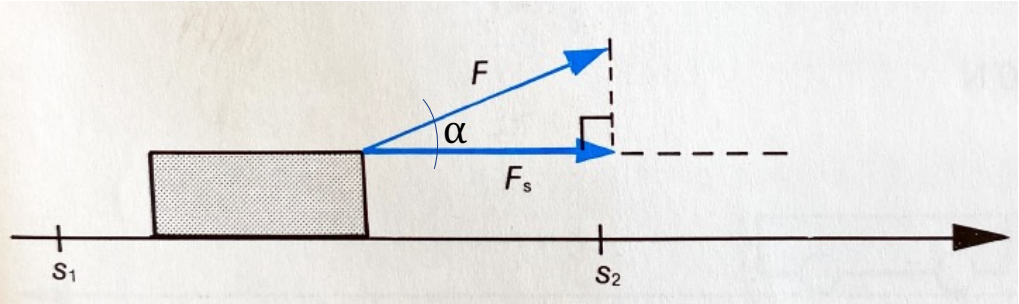
TRANSLATION

Arbejde, A, *det som udføres*: I det følgende kalder vi arbejdet for Energi, **E**

Hvis kraften er parallel med flytningsvektoren er arbejdet produktet af kraft og flyttet afstand A= $\mathrm{F} \cdot \mathrm{s}$ [Nm]. Måleenheden for **arbejde** bliver newton gange meter, og denne enhed kaldes **joule**, så der gælder altså **1 J = 1 N·m.**

Hvis kraftvektor og flytningsvektoren danner en vinkel, a, med hinanden findes arbejdet ved at projektere kraften ind på flytningsvektoren.

$$\mathrm{E} = \mathrm{F} \cdot \mathrm{s} \cdot \cos(\alpha)$$



Bemærk: kraft og afstand kan være vektorer i rummet 3 dim (x, y, z).
Men det ser vi lige bort fra i denne uge.

Men allerede nu ved vi altså at har set bort fra "noget.

Dette gælder **kun** for en konstant kraft. Hvis kraften varierer må vi finde arbejdet som en opsummering:

$$\mathrm{dE} = \vec{\mathrm{F}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{dS}} \rightarrow \mathrm{E} = \int \vec{\mathrm{F}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{dS}}$$

ENERGI, ARBEJDE OG EFFEKT

Translation betyder legemets dele laver samme bevægelse.

TRANSLATION

Effekt, P, *udført arbejde pr. tidsenhed, energi pr. tidsenhed*

$$P = \frac{E}{t}\ [W]$$

Med $E = F \cdot s$ [Nm] og $s = v \cdot t \leftrightarrow v = \frac{s}{t}$

kan effekt udtrykkes ved "kraft gange vej" eller " kraft gange hastighed"

$$\boxed{P = \frac{F \cdot s}{t} = F \cdot v\ [W]}$$

Heraf ses også at arbejde eller energi også kan findes som effekten gange tiden:

$$\boxed{E = P \cdot t\ [J]}$$

Vær varsom med hvilken effekt og hvilke energi eller arbejde det drejer sig om!

GÆNSE ENHEDER FOR ENERGI OG EFFEKT

J OG WH. W OG HK

Energi [J]

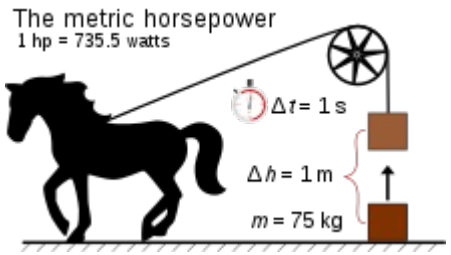
$$E = P \cdot t = [J] = [W] \cdot [s]$$

Watt sekunder [Ws] kan omregnes til watt timer [Wh]

$$\boxed{1\ \mathrm{Wh} = 1\ \mathrm{W} \cdot 3600\ \mathrm{s} = 3600\ \mathrm{J}}$$

Effekt [W] (Hastigheden af energien, det er jo bare joule pr. Sekund [J/s])

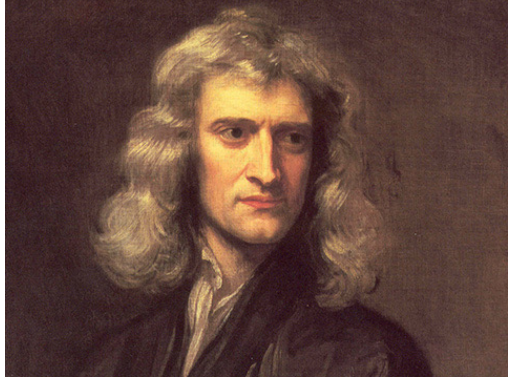
$$P = \frac{E}{t} = \left[\frac{J}{s}\right] = [W]$$



Bemærk i øvrigt at effekt på en motor ofte opgives i Watt [W] eller i hestekræfter [hk]

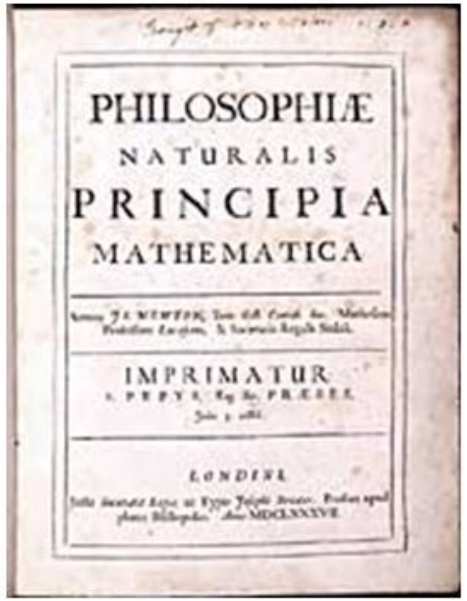
1 hk= 736 W

NEWTONS 3 LOVE OMFATTER "ALT"



Sir Issac Newton

Newtons love



Isaac Newton (1642 – 1727)

1. **Inertiens lov: Et legeme, som ikke er påvirket af kræfter, vil enten forblive i hvile eller foretage en uniform lineær bevægelse.**

2. **Accelerationsloven: Et legemes masse, m, gange dets acceleration, a, er lig med den resulterende kraft på legemet, F. (a og F er vektorer)**

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

3. **Loven om aktion og reaktion: Hvis A påvirker B med en kraft, så vil B påvirke A med en lige så stor og modsatrettet kraft.**

$$\overrightarrow{F_{A,B}} = -\overrightarrow{F_{B,A}}$$

Uniform: Jævn

Resulterende: Samlede

KRÆFTER

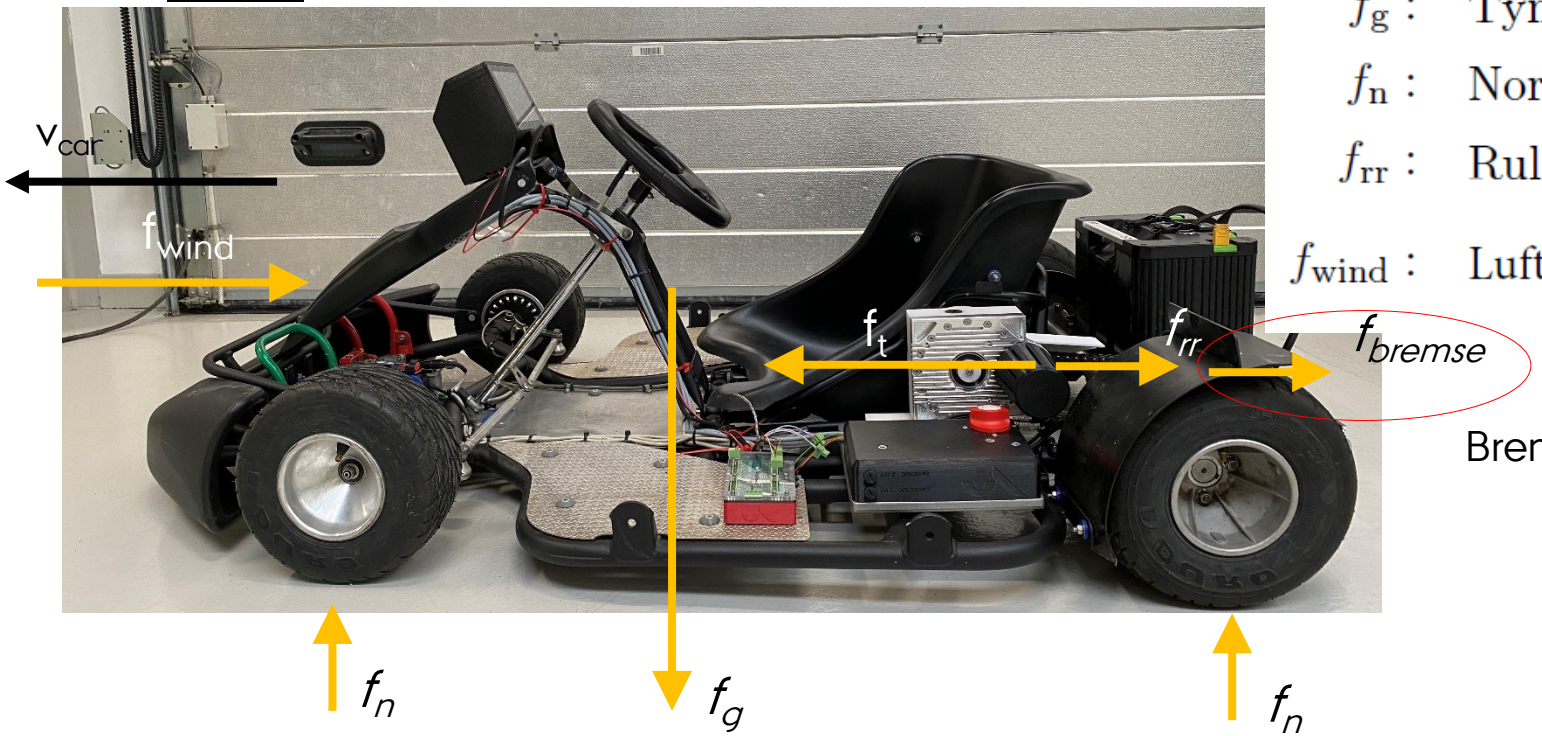
Hvad er en kraft?

"En kraft er et skub eller et træk"

Dette er simpelt, men stadig korrekt. Det findes forskellige typer af kræfter. Kan inddeles i 2 kategorier:

Kontaktkræfter	Kræfter uden kontakt
Normal kraft	**Tyngekraft**
Friktionsmodstand (gnidning)	Elektriske
Rullemodstand (rulning, deformation)	Magnetiske
Luft modstand	Stærke nukleare*
Fjedermodstand	Svage nukleare*
Træk / Tryk, sammentrækning enhver anvendt kraft	* Anvendes inden for kvantemekanik. Vi arbejder med Newtonsk mekanik

ANALYSE - EFFEKT OG ENERGI GO-CART



f_t : Trækkraft der påvirker køretøjet,

f_g : Tyngdekraftens påvirkning på køretøjet ,

f_n : Normalkraft på køretøjet ,

f_{rr} : Rullemodstandskraft fra dækkene på køretøjet ,

f_{wind} : Luftmodstand der påvirker køretøjet .

Bremsekraft virker modsat bevægelsesretning

Luftmodstand i modsat retning af kørelsretning
Tyngdekraft angriber i massecentrum.
Normalkraft angriber i hjulenes kontaktpunkter. Summen af normalkraften svarer til tyngdekraften
Trækkraften virker i bevægelsesretningen.
Rullemodstanden er modsatrettet bevægelsesretningen

ENERGI NÅR DU BREMSER

Når der bremes skal der fjernes energi fra systemet. Dette sker eksempelvis ved en bremsekaliper trykkes sammen med en kraft omkring en bremseskive. Denne kraft kan regnes om til en bremsekraft.

Energien for krafts arbejde var givet ved:

$$E = F \cdot s$$

Arbejdet der bevæger gokarten fremad er givet ved den kinetiske bevægelsesenergi

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

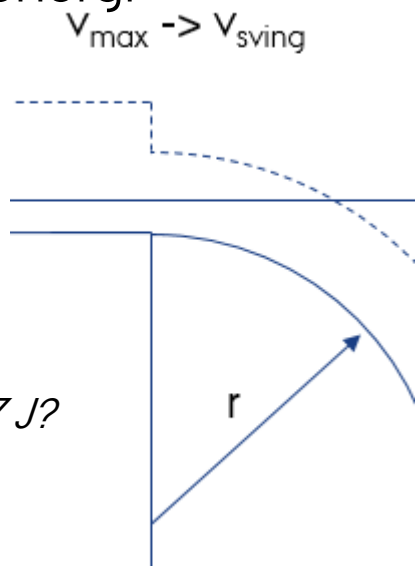
Hvis der er en ændring i arbejdet kan det regnes ud som

$$\Delta E = F \cdot \Delta s = E_{kin,2} - E_{kin,1} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2$$

Eksempel fra 23km/h til 11,5km/h ved en masse på 173km

$$\Delta E = \frac{1}{2} \cdot 173\text{kg} \cdot 3{,}2^2 \ - \frac{1}{2} \cdot 173 \cdot 6{,}5^2 \ = -2667\ \text{J}$$

WtF betyder 2667 J?



KRÆFTER

UDVALGTE FORMLER I FORBINDELSE MED GO-CART

m: Masse
g: Tyngdekraftsacceleration
C_{rr}: Rullemodstandskoefficient
A : Tværsnitsareal
C_d : Drag Koefficient
ρ : Massefylde luft
v : Hastighed

Følgende kræfter optræder i forbindelse med go-cart

Vi anvender en såkaldt simpel partikel model og bruger nogle grove antagelser

Kraft	Formel
Tyngekraft	$F_g = m \cdot g$
Normal kraft	$F_N = m \cdot g$ (kun horisontalt!)
Rullemodstandskraft	$F_{rr} = F_N \cdot C_{rr}$
Luft modstand	$F_{wind} = \frac{1}{2} \cdot A \cdot C_d \cdot \rho \cdot v^2$

Hvad har vi nu set bort fra?

Eller antaget?

LUFTMODSTAND

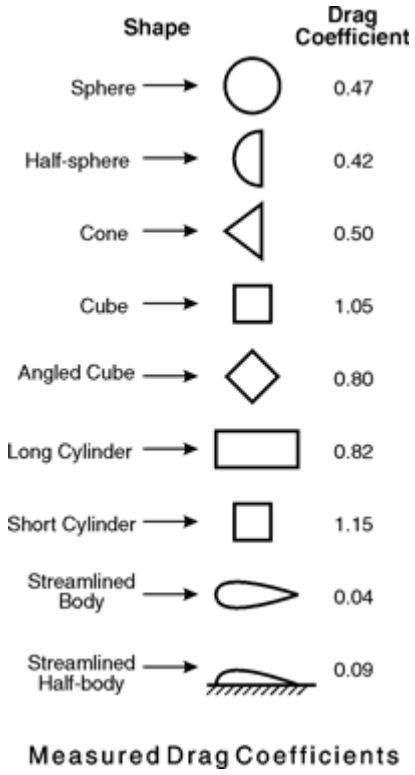
$$F_{wind} = \frac{1}{2} \cdot A \cdot C_d \cdot \rho \cdot v^2$$

A : Tværsnitsareal af legemet i forhold til retningen

C_d : Drag Koefficient afhænig af legemets form og materiale

ρ : Massefylde af luft

v : Luftens hastighed



Forsimplet formel som gælder ved "store legemer" og "middelhastigheder." Der tages eksempelvis ikke hensyn til turbulens eller andre ikke lineære forhold.

NEWTONS 2. LOV

BEVÆGELSE

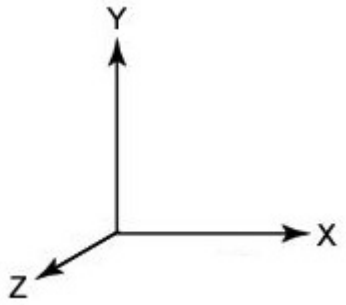
<u>Accelerationsloven</u>

Den samlede kraft som et legeme udsættes for er lig med dens masse gange dens samlede acceleration.

Newtons 2. lov

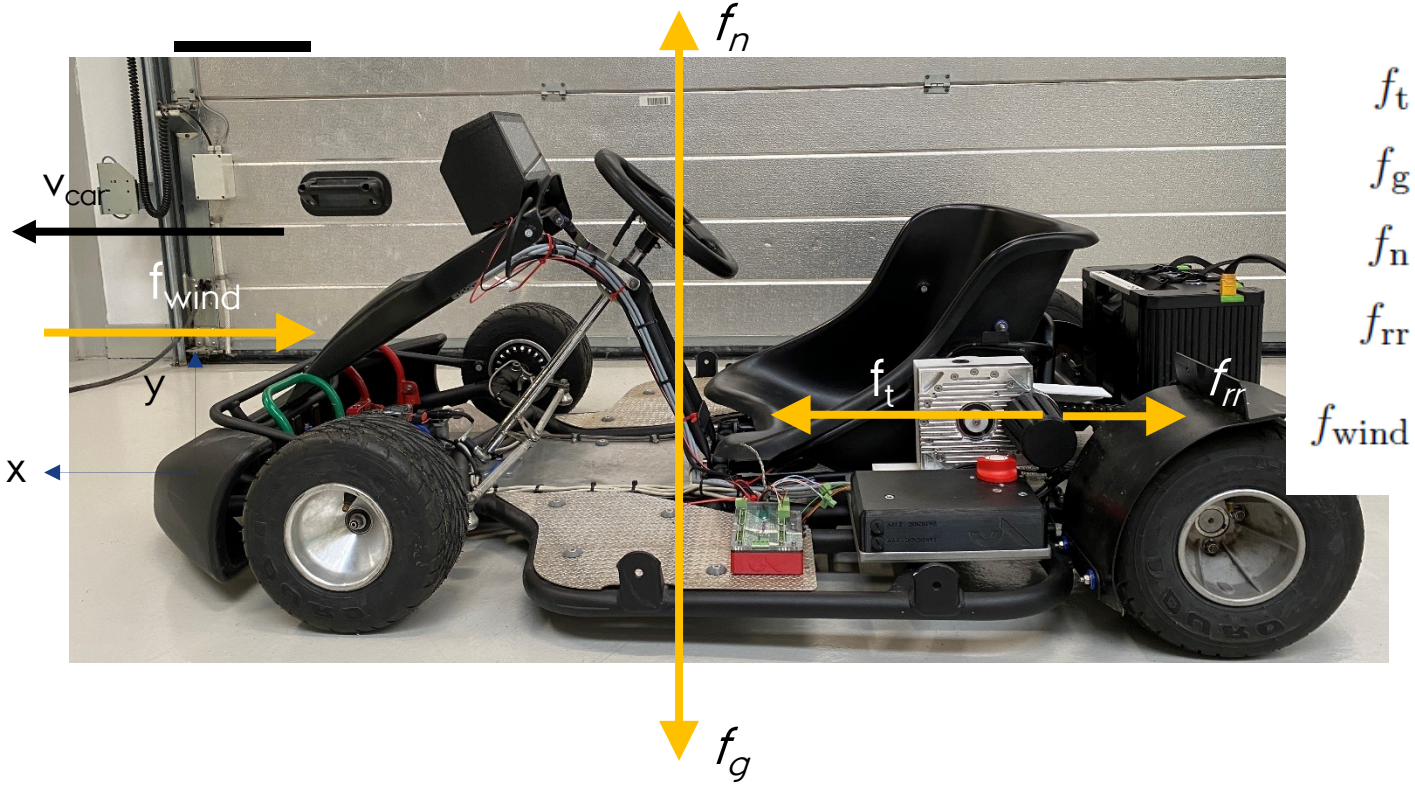
$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = \begin{Bmatrix} F_x = m \cdot a_x \\ F_y = m \cdot a_y \\ F_z = m \cdot a_z \end{Bmatrix}$$

$$\bar{F} = m \cdot \mathbf{a}$$



Heraf ses også at en stor acceleration skal man bruge en stor kraft eller en lille masse.

ANALYSE - KRÆFTER PÅ BIL



f_t : Trækkraft der påvirker køretøjet,

f_g : Tyngdekraftens påvirkning på køretøjet ,

f_n : Normalkraft på køretøjet ,

f_{rr} : Rullemodstandskraft fra dækkene på køretøjet ,

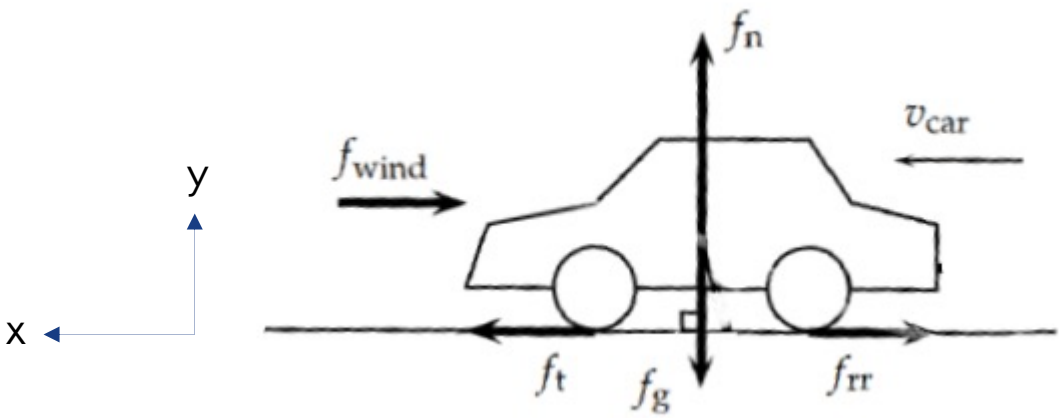
f_{wind} : Luftmodstand der påvirker køretøjet .

Find trækkræften på bilen, $f_{t(v)} = ?$

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \sum F_x &= m \cdot a_x \\ \sum F_y &= m \cdot a_y \\ \sum F_z &= m \cdot a_z \end{aligned}$$

Luftmodstand i modsat retning af kørelsretning
Tyngdekraft angriber i massecentrum.
Normalkraft angriber i hjulenes kontaktpunkter. Summen er vist.
Trækkraften virker i bevægelsesretningen.
Rullemodstanden er modsatrettet bevægelsesretningen.
Bremsekraft udeladt, men tages med i energiregnskab

ANALYSE - KRÆFTER PÅ BIL



f_t : Trækkraft der påvirker køretøjet,

f_g : Tyngdekraftens påvirkning på køretøjet ,

f_n : Normalkraft på køretøjet ,

f_{rr} : Rullemodstandskraft fra dækkene på køretøjet ,

f_{wind} : Luftmodstand der påvirker køretøjet .

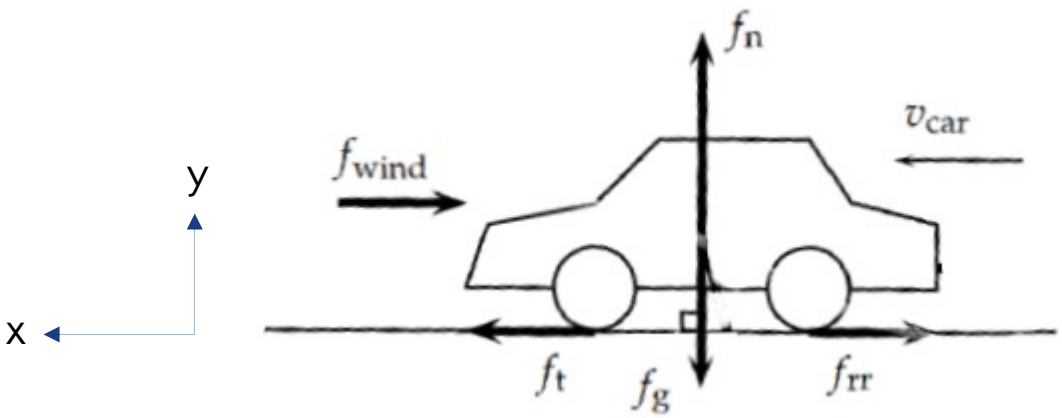
Find trækkræften på bilen, $f_{t(v)} = ?$

$$\rightarrow \sum F_x = m \cdot a_x \leftrightarrow -f_{wind} + f_t - f_{rr} = m \cdot a_{car} \leftrightarrow \underline{f_t = m \cdot a_{car} + f_{rr} + f_{wind}}$$

$$\uparrow \sum F_y = m \cdot a_y = 0 \leftrightarrow f_n - f_g = 0 \leftrightarrow \underline{f_n = f_g}$$

$$\cdot \sum F_z = m \cdot a_z = 0$$

ANALYSE - KRÆFTER PÅ BIL



f_t : Trækkraft der påvirker køretøjet,

f_g : Tyngdekraftens påvirkning på køretøjet ,

f_n : Normalkraft på køretøjet ,

f_{rr} : Rullemodstandskraft fra dækkene på køretøjet ,

f_{wind} : Luftmodstand der påvirker køretøjet .

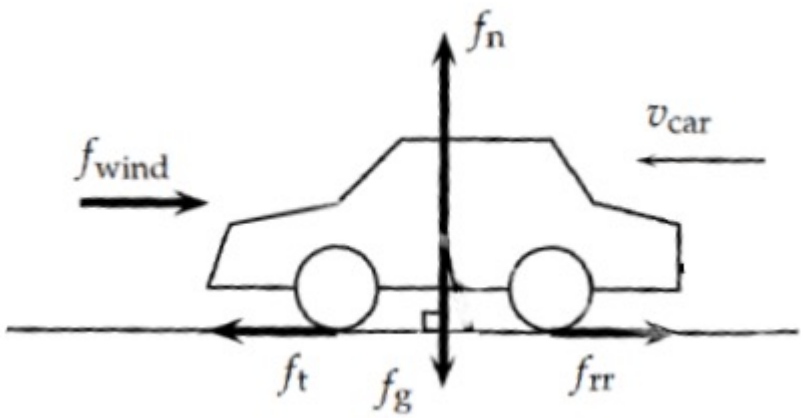
Find trækkræften på bilen, $f_t = ?$

$$\rightarrow \sum F_x = m \cdot a_x \leftrightarrow -f_{wind} + f_t - f_{rr} = m \cdot a_{car} \leftrightarrow f_t = m \cdot a_{car} + f_{rr} + f_{wind}$$

$$\uparrow \sum F_y = m \cdot a_y = 0 \leftrightarrow f_n - f_g = 0 \leftrightarrow f_n = f_g$$

$$f_{rr} = f_n \cdot C_{rr} = m \cdot g \cdot c_{rr} \qquad f_{wind} = \frac{1}{2} \cdot A \cdot C_d \cdot \rho \cdot v^2$$

ANALYSE - KRÆFTER PÅ BIL



f_t : Trækkraft der påvirker køretøjet,

f_g : Tyngdekraftens påvirkning på køretøjet ,

f_n : Normalkraft på køretøjet ,

f_{rr} : Rullemodstandskraft fra dækkene på køretøjet ,

f_{wind} : Luftmodstand der påvirker køretøjet .

$$f_t = \underbrace{m_{car} \cdot a_{car}}_{\text{Acceleration } (F_I)} + \underbrace{m_{car} \cdot g \cdot c_{rr}}_{\text{Rullemodstandskraft } (F_{rr})} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C_{drag} \cdot A_{front} \cdot v_{car}^2}_{\text{Luftmodstand } (F_{wind})} \; [N]$$

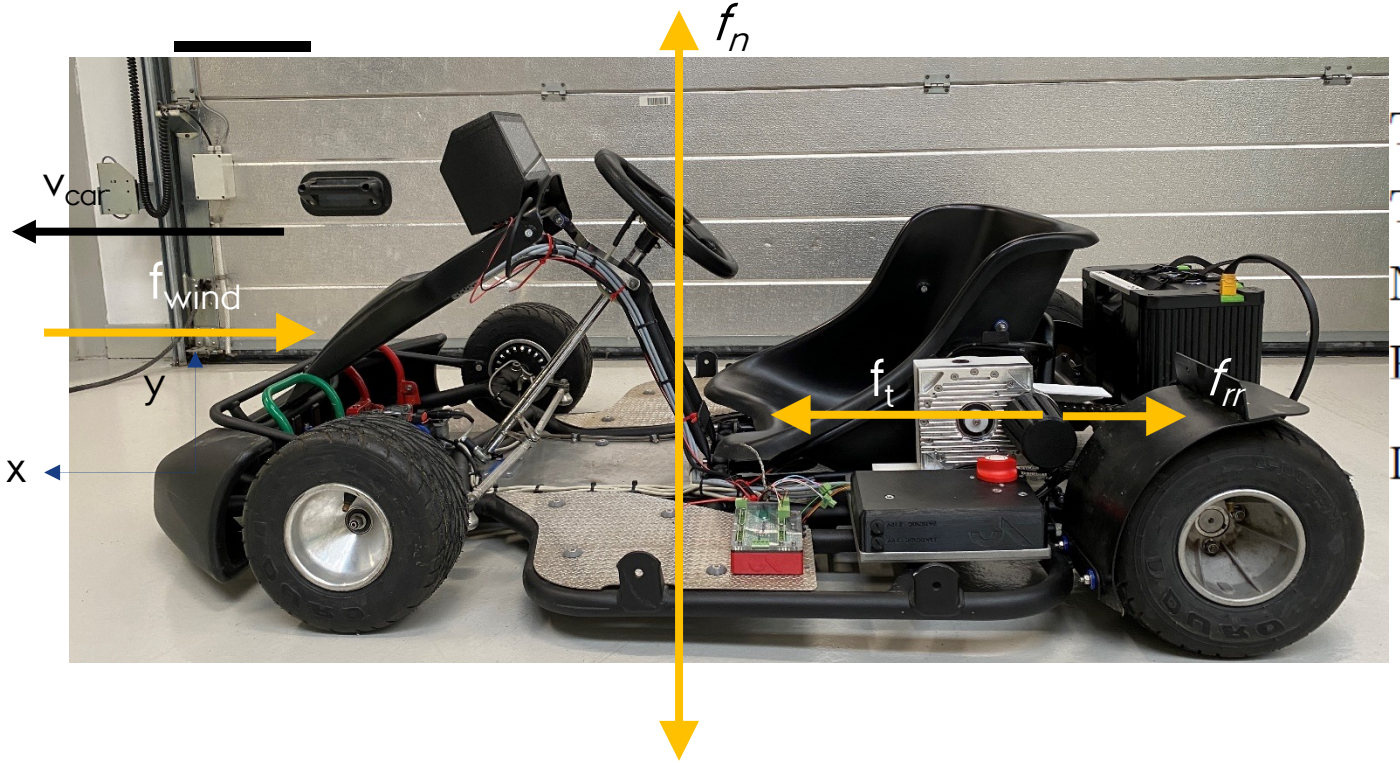
Kan vi også regne effekten ud?

$P = F \cdot v \; [W]$

Kan vi også regne energien ud?

$E = P \cdot t \; [J]$

ANALYSE - EFFEKT OG ENERGI GO-CART



Trækkraft der påvirker køretøjet,

Tyngdekraftens påvirkning på køretøjet ,

Normalkraft på køretøjet ,

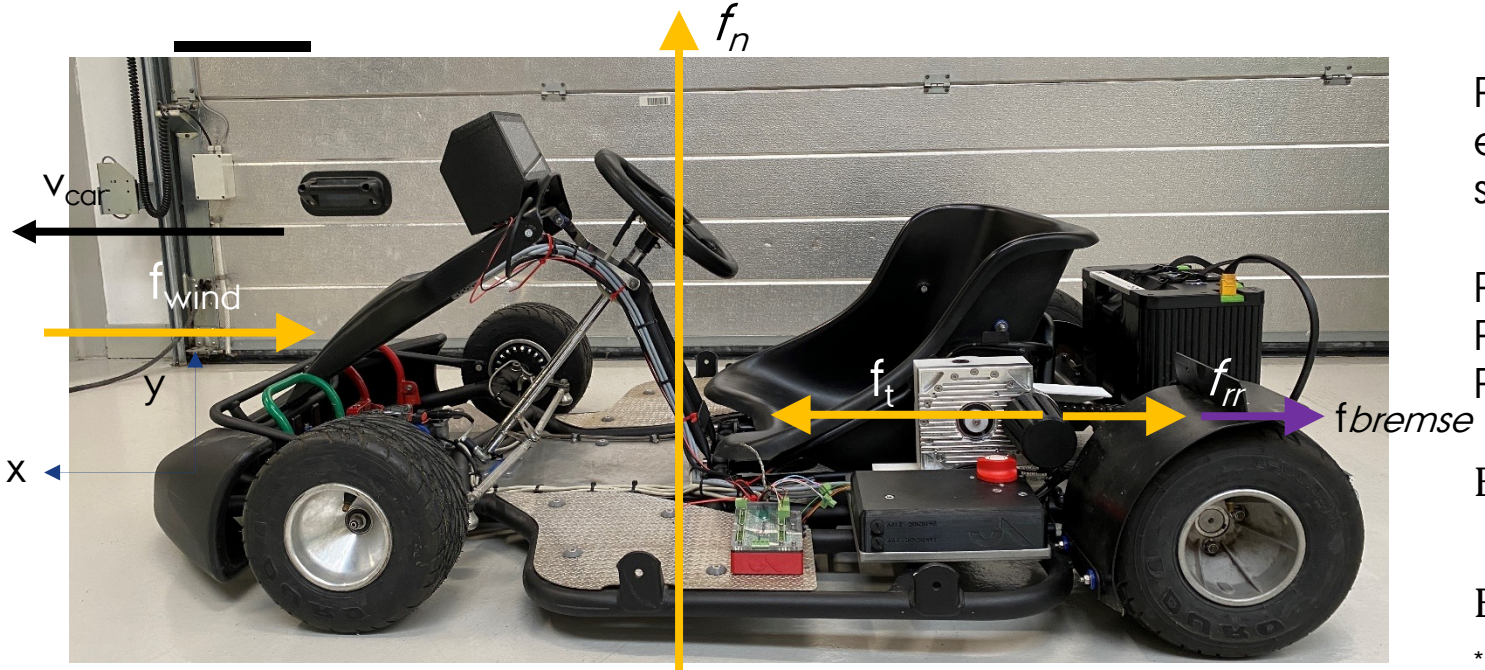
Rullemodstandskraft fra dækkene på køretøjet ,

Luftmodstand der påvirker køretøjet .

$$P_t = f_t \cdot v_{car} = m_{car} \cdot a_{car} \cdot v_{car} + m_{car} \cdot g \cdot c_{rr} \cdot v_{car} + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C_{drag} \cdot A_{front} \cdot v_{car}^3 \text{ [W]}$$

$$E_t = P_t \cdot t = (m_{car} \cdot a_{car} \cdot v_{car} + m_{car} \cdot g \cdot c_{rr} \cdot v_{car} + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C_{drag} \cdot A_{front} \cdot v_{car}^3) \cdot t \text{ [J]}$$

ANALYSE - EFFEKT OG ENERGI GO-CART MED BREMSE



P_t afsættes på motorens aksel og er den effekt driver go-carten fremad og skal være lige med summen af:

P_a : ændringer i hastighed
P_{rr} : rullemodstand
P_{wind} : Vindmodstand

E_{bremse}: Energi for hver gang der bremses

$$E_{bremse} = E_{kin,2} - E_{kin,1} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2$$

* bem: E_{bremse} er negativ fordi vi går fra (v_1) en høj hastighed til en lav hastighed (v_2)

$$P_t = \underbrace{m_{car} \cdot a_{car} \cdot v_{car}}_{P_a} + \underbrace{m_{car} \cdot g \cdot c_{rr} \cdot v_{car}}_{P_{rr}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C_{drag} \cdot A_{front} \cdot v_{car}^3}_{P_{wind}} \; [W]$$

$$E_t = P \cdot t \; [J] - E_{bremse}$$

DISKUSSION PARAMETRE ?

Hvilke parametre vil du forbedre for at bruge mindst mulig energi? Og hvordan?

$$E_t = P_t \cdot t - E_{bremse} \text{ [J]}$$

$$E_t = (m_{car} \cdot a_{car} \cdot v_{car} + m_{car} \cdot g \cdot c_{rr} \cdot v_{car} + \frac{1}{2} \cdot g \cdot C_{drag} \cdot A_{front} \cdot v_{car}^3) \cdot t - E_{bremse} \text{ [J]}$$

Samlet masse, $m_{car} = m_{gocart} + m_{person}$

Acceleration: a_{car}

Hastighed af gokart: v_{car}

Tyngdekraftacceleration: g

Rullemodstand, C_{rr}

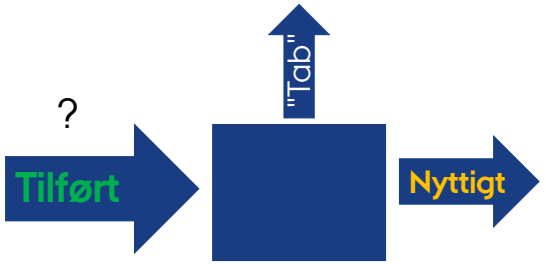
Drag koefficient, C_{drag}

Areal af go-cart: A_{front}

Antal opbremsninger: E_{bremse}

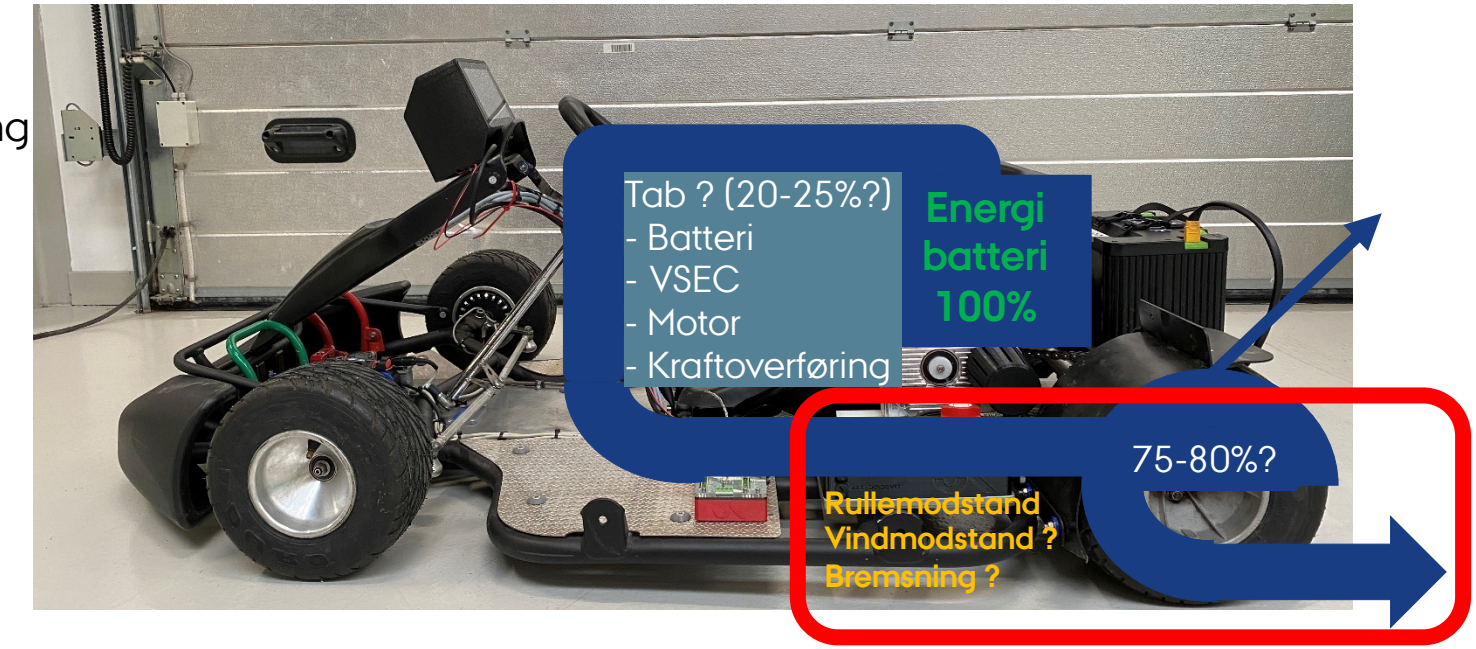
Hvilke parametre kan du ændre?
Hvilke led du påvirke?

MEKANISK ENERGI
ELEKTRISK ENERGI



$$\eta = \frac{\text{Nyttigt Arbejde}}{\text{Tilført Arbejde}}$$

Bevægelsesretning



Hvordan beregnes den energi som batteriet, E_{bat} skal levere?

$$\text{"Tilført Arbejde"} = \frac{\text{Nyttigt Arbejde}}{\eta}$$

Antag en virkningsgrad på 80%

BEREGNINGER

3 Grupper

Opgave A+B - 10min - energi for en distance på 300m

Gruppe 1 regner for 15km/h

Gruppe 2 regner for 23km/h

Gruppe 3 regner for 80km/h

Diskussion samlet

Opgave C - 5min - energi ved opbremsninger

Gruppe 1 regner for 23 til 11,5 km/h

Gruppe 2 regner for 23 til 15 km/h

Gruppe 3 regner for 23 til 20km/h

Diskussion samlet

PARAMETRE
GOKART TIL OPGAVER

Areal af go-cart: A_{front} = 0,47m2

Tyngdekraftacceleration: g = 9,82 m/s^2

Samlet masse, m = m+mp = 173,5 kg

Drag koefficient, C_{drag} = 0,8

Rullemodstand, C_{rr} = 0,05

Massefylde luft: 1,225 kg/m^3 (v. 15 °C)

Maksimum hastighed ~ 23 km/h

Maksimum acceleration ~ 1 m/s2

Virkningsgrad elmotor, elektrisk system = 80%

UDLEVER ARK!

OPGAVE A

BEREGN EFFEKT FOR RULLEMODSTAND OG LUFTMODSTAND VED KONSTANT HASTIGHED, DVS ACCELERATION = 0

v_{car} [km/h]	v_{car} [m/s]	Prr	Pwind	Total [W]				
15								
23								
80								

$$P_t = \underbrace{m_{car} \cdot a_{car} \cdot v_{car}}_{P_a} + \underbrace{m_{car} \cdot g \cdot c_{rr} \cdot v_{car}}_{P_{rr}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C_{drag} \cdot A_{front} \cdot v_{car}^3}_{P_{wind}} \text{ [W]}$$

$$P_t = 85{,}2 \cdot v_{car} + 0{,}2 \cdot v_{car}^3 \text{ [W]}$$

OPGAVE B - DISTANCE PÅ 300 M

BEREGN EFFEKT FOR RULLEMODSTAND OG LUFTMODSTAND VED KONSTANT HASTIGHEDER, DVS ACCELERATION = 0

v_{car} [km/h]	v_{car} [m/s]	Prr	Pwind	Total [W]	s [m]	t [s]	Et [J]	Et [Wh]	E_{bat} [Wh]
15	4,2	355	17	372	300				
23	6,4	544	60	604	300				
80	22,2	1893	2577	4420	300				

$$E_t = P_t \cdot t$$

$$E_{bat} = \frac{E_t}{\eta}$$

OPGAVE C - OPBREMSNINGER
UDREGN ENERGIEN VED OPBREMSNINGER

v_1 [km/h]	v_2 [km/h]	v_1 [m/s]	v_2 [m/s]	E_{kin2} [J]	E_{kin1} [J]	E_{bremse} [J]	E_{bremse} [Wh]
23	11,5						
23	15						
23	20						

$$\Delta E_{bremse} = E_{kin,2} - E_{kin,1} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2$$

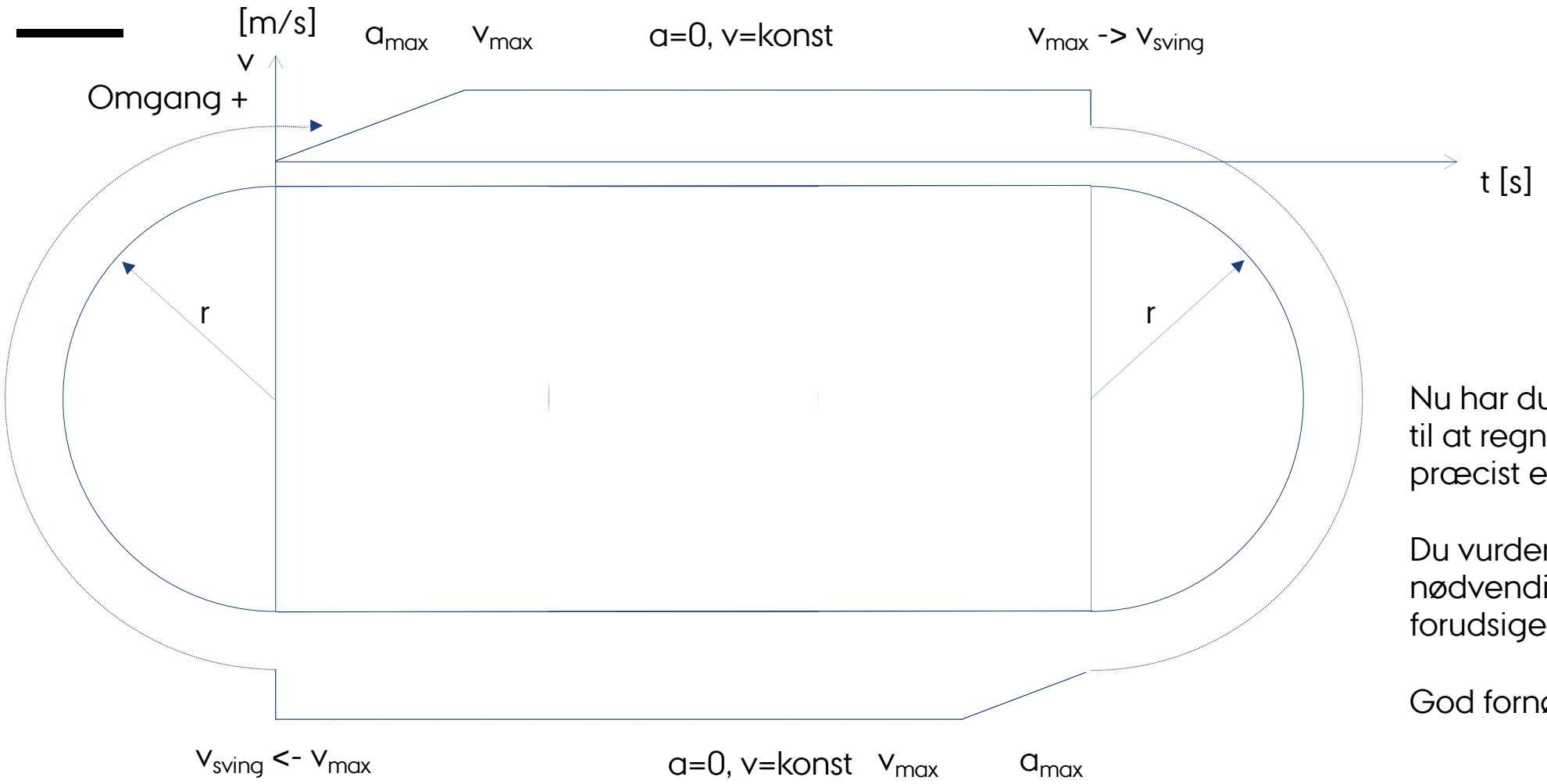
Dette gælder hver gang du laver en opbremsning

Så hvordan kører du med mindst mulig energi?

$$E = P \cdot t\,[J] - \Delta E_{bremse}$$

Hvordan kører du hurtigst mulig rundt?

RACE IN ON
HURTIGST RUNDT, MINDST MULIG ENERGI



Nu har du teoretisk værktøj til at regne energi ud mere præcist end blot 300m..

Du vurderer selv om det er nødvendigt for dit hold for at forudsige energiforbruget.

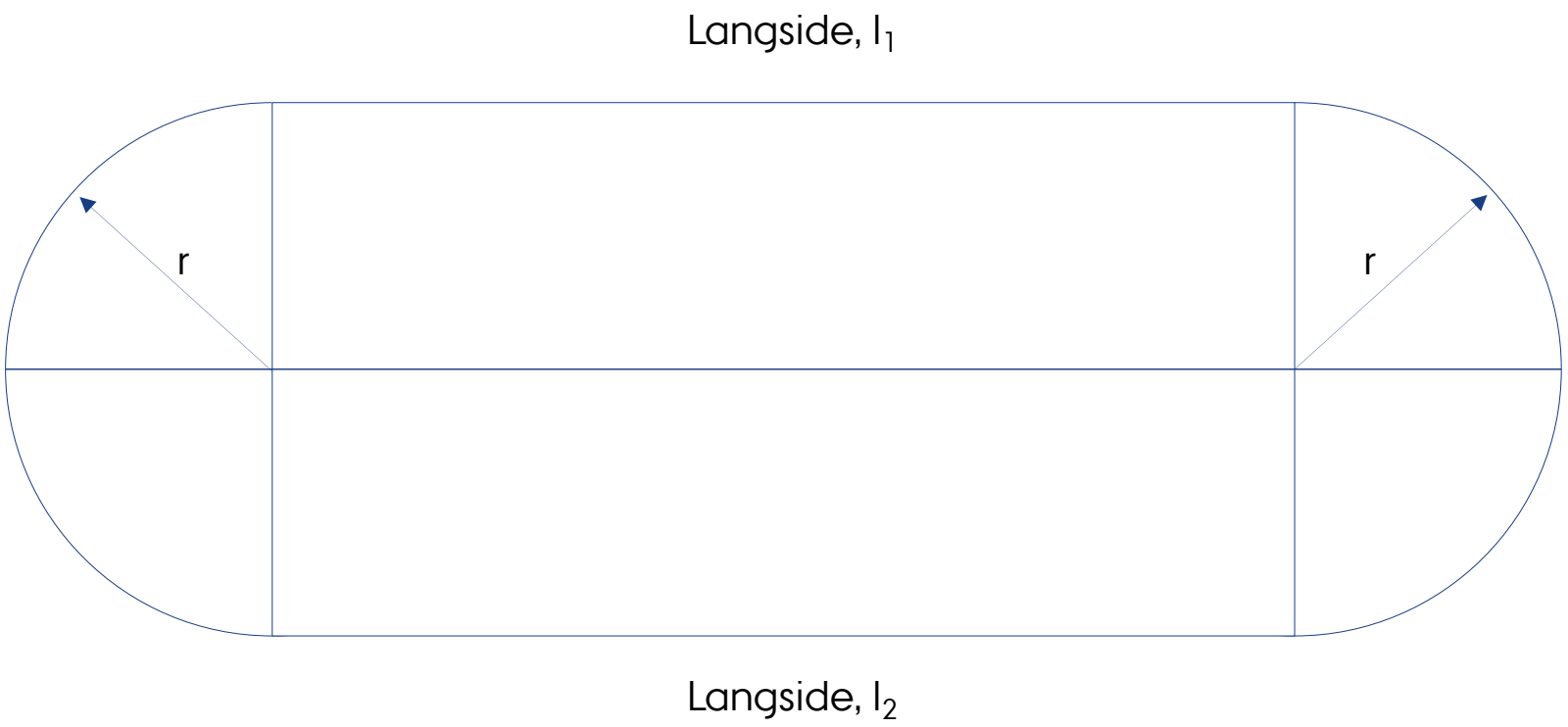
God fornøjelse med løbet.

JESPER HØGH STENGAARD HANSEN
ADJUNKT

SKEMA TIL BEREGNING AF ENERGI MED ACCELERATION

	a	v	s	t	Pt	Et	Ebrems	Et+Ebrems [J]	Et+Ebrems [Wh]
1. Acc	a_{max}	v_{max}	beregn	beregn	beregn	beregn	0	beregn	beregn
2. langs	0	v_{max}	beregn	beregn	beregn	beregn	0	beregn	beregn
3. Brems	"0"	v_{max}-v_{sving}	"0"	"0"	"0"	"0"	beregn	beregn	beregn
4. Sving	0	v_{sving}	pi*r	beregn	beregn	beregn	0	beregn	beregn
5. Acc	a_{max}	v_{sving} til v_{max}	beregn	beregn	beregn	beregn	0	beregn	beregn
6. Langs	0	v_{max}	beregn	beregn	beregn	beregn	0	beregn	beregn
7. Brems	"0"	v_{max}-v_{sving}	"0"	"0"	"0"	"0"	beregn	beregn	beregn
8. Sving	"0"	v_{max}-v_{sving}	"0"	"0"	"0"	"0"	beregn	beregn	beregn
Total								beregn	beregn
Elektrisk Enegi									beregn

GOKART BANE

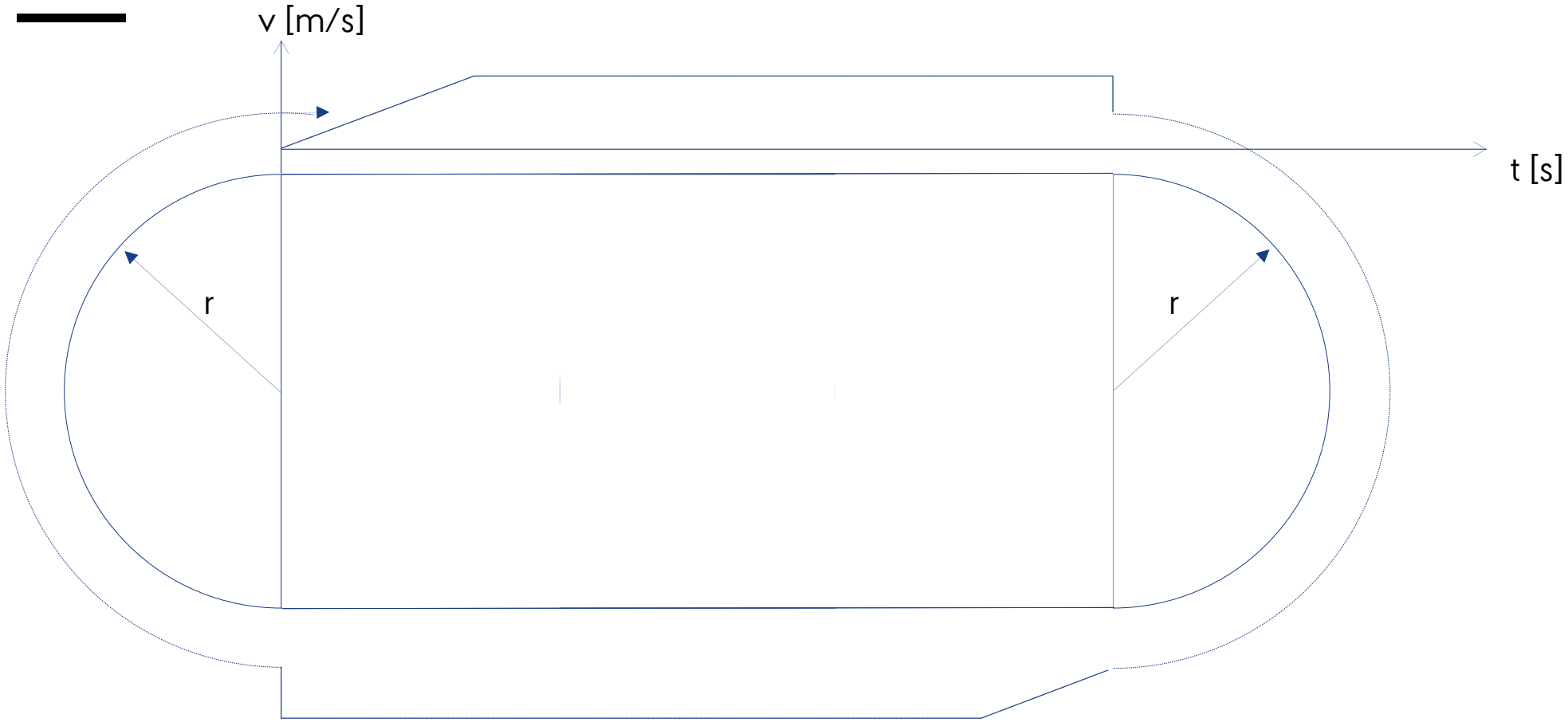


$r = 8$ m
$l_1 = 100$m
$l_2 = 100$m

Totale længde: 300 m

HJÆLPESLIDES

BEVÆGELSE - KINEMATIK

Translatorisk bevægelse
Konstant hastighed
$s = v_0 \cdot t + s_0$ (1)
Konstant acceleration
$v = a \cdot t + v_0$ (2)
$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + s_0$ (3)
$s = \frac{1}{2}(v_1 + v_0) \cdot t$ (4)
$v_1 = \pm\sqrt{v_0^2 + 2 \cdot a \cdot s}$ (5)

RACE IN ON
HURTIGST RUNDT, MINDST MULIG ENERGI